UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte II)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n.
   (a) Sea $T : V \to V$ un operador idempotente, es decir $T^2 = T$. Demuestre que $\mathrm{tr}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$.
   (b) Sean $T_1, T_2, \cdots, T_m$ operadores idempotentes en V tales que
   $$T_1 + T_2 + \cdots + T_m = I,$$
   donde I es el operador identidad en V.
      i. Demuestre que $V = \mathrm{Im}(T_1) \oplus \mathrm{Im}(T_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(T_m)$.
      ii. ¿ Es verdad que $T_iT_j = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, m,\ i \neq j$?

2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrales en $[0, 1]$ tales que $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, 1]$, y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones de área correspondientes
   $$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$
   Demostrar que existe una subsucesión de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en $[0, 1]$.

3. (a) Sea (X, T) un espacio topológico que posee un recubrimiento abierto $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que
      i. $\cap_{i\in I} V_i \neq \emptyset$.
      ii. Para todo $i \in I$, V_i es simplemente conexo.
      iii. Para cualquier par de indices $i \neq j$, $V_i \cap V_j$ es conexo por caminos.

      Demostrar que (X, T) es simplemente conexo.
   (b) Dado el espacio topológico $Y = A \cup B$, donde
   $$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
   $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0, z = 0, -1 \leq y \leq 1\}.$$
   Calcular el grupo fundamental de Y.

4. (a) Hallar el subanillo más pequeño de $\mathbb{Q}$ que contiene el número $\frac{1}{3}$.
   (b) Sea $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] :\ f(0) = 0\} \subset \mathbb{Z}[x]$.
      i. Demostrar que I es un ideal de $\mathbb{Z}[x]$.
      ii. Sea n un entero positivo. Demostrar que existe una sucesión de ideales estrictamente crecientes de $\mathbb{Z}[x]$ tal que $I \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n$.

5. Sean F un campo, $\mathrm{GL}(n, F)$ el grupo de matrices invertibles de orden $n\times n$ con entradas en F y E una extensión de campos de F con $[E : F] = n$. Demostrar que $\mathrm{GL}(n, F)$ contiene un subgrupo isomorfo a $E^{\times}$ (el grupo de elementos distintos de cero de E bajo la multiplicación).